**MATEMÁTICAS 2º BACH. A**

**2-2-2018**

***“Complicarme me resulta muy sencillo”***

*Fito y los Fitipaldis*

**1.- Dada la función** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+6}{x-1} & x\le 0\\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & x>0\end{cases}$

**a) Estudiar su continuidad y derivabilidad y calcular su función derivada**

**b) Calcular sus extremos absolutos en el intervalo [-2,2]**

*Solución:*

a) Como $D_f=\mathbb{R}$ . el único punto donde podría no ser continua o derivable es en $x = 0$

Vemos primero continuidad:

$f(0)=-6$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+6}{x-1}=-6\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \quad \text{No es continua en } x=0$$

Al no ser continua en $x = 0$ tampoco es derivable en dicho punto. Por tanto esta función es continua y derivable en todo su dominio menos en $x = 0$, y su función derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{4x(x-1)-(2x^2+6)}{(x-1)^2}=\dfrac{2x^2-4x-6}{(x-1)^2} & x<0\\ \dfrac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{4x}{(x^2+1)^2} & x>0\end{cases}$$

b) Calculo los puntos críticos:

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}2x^2-4x-6=0\ \Rightarrow\ x=-1,\ x=3\ (\textit{no está en } x<0)\\ 4x=0\Rightarrow\ x=0\ (\textit{no está en } x<0)\end{cases}$$

Además del $-1$ (punto crítico), tenemos como posibles extremos absolutos los extremos del intervalo ($-2$ y $2$) y el 0 (punto donde no es continua ni derivable)

Si sustituimos en la función:

$$f(-2)=-\frac{14}{3}\ \ ;\ \ f(-1)=-4\ ;\ f(0)=-6\ ;\ f(2)=\frac{3}{5}$$

Por tanto, en dicho intervalo el mínimo absoluto se alcanza en el punto $(0,-6)$ y el máximo absoluto en el punto $\left(2,\dfrac{3}{5}\right)$

**2.-** **Dada la función** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-e^{-x}}{2x} & x<0 \\ ax+b & x\geq 0 \end{cases}$

**a)** **Calcular *a* y *b* para que sea derivable y calcular su función derivada**

**b)** **Calcular la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x = - 1***

<u>*Solución:*</u>

a) Como $D_f=\mathbb{R}$ . el único punto donde podría no ser continua o derivable es en $x = 0$

Vemos primero continuidad:

$f(0)=b$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} ax+b=b \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=L'H=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow b=1$$

Calculamos la derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{\left(e^x+e^{-x}\right)2x-\left(e^x-e^{-x}\right)2}{4x^2} & x<0 \\ a & x\geq 0 \end{cases}$$

Vemos si es derivable en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0} a=a$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)2x-\left(e^x-e^{-x}\right)2}{4x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=L'H=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)2x+2\left(e^x+e^{-x}\right)-2\left(e^x+e^{-x}\right)}{8x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)2x}{8x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)}{4}=0$$

Por tanto, para que sea continua y derivable, $a = 0$ y $b = 1$

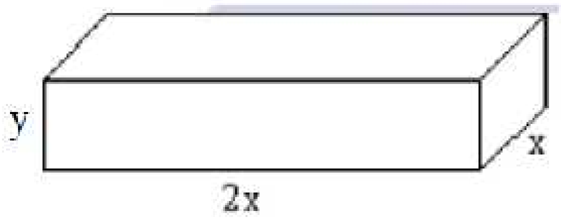
b) La ecuación de la recta normal es: $y-f(a)=-\dfrac{1}{f(a)}(x-a)$

Calculo $f(-1)=\dfrac{e^{-1}-e}{-2}$ ; $f'(-1)=\dfrac{-2e^{-1}-2e-2e^{-1}+2e}{4}=\dfrac{-4e^{-1}}{4}=-e^{-1}=-\dfrac{1}{e}$

Luego la recta normal en $x = -1$ será:

$$y+\frac{e^{-1}-e}{2}=e(x+1)$$

**3.-** **Se desea construir un paralelepípedo rectangular de 9 litros de volumen y tal que un lado de la base sea doble que el otro. Determinar las longitudes de sus lados para que el área total de sus 6 caras sea mínima.**




*Solución:*

La función que da el área de las seis caras del paralelepípedo es:

$$A(x,y) = 4xy + 2xy + 2x^2 = 6xy + 2x^2$$

Como el volumen es de 9 litros: $V = 2x^2 y = 9 \Rightarrow y = \dfrac{9}{2x^2}$

Sustituyendo en la función obtenemos:

$$A(x) = 6x\frac{9}{2x^2} + 2x^2 = \frac{27}{x} + 2x^2 = \frac{27 + 2x^3}{x}$$

Esa es la función cuyo mínimo queremos calcular. Por tanto, obtenemos sus puntos críticos:

$$A'(x) = \frac{12x^3 - (27 + 4x^3)}{x^2} = \frac{8x^3 - 27}{x^2} \Rightarrow 8x^3 - 27 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Y los intervalos de monotonía serán:

$$\left(0, \frac{3}{2}\right) \rightarrow A'(1) < 0 \Rightarrow \textit{decreciente}$$

$$\left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \rightarrow A'(2) > 0 \Rightarrow \textit{creciente}$$

Y por tanto si $x = \dfrac{3}{2}$ es un mínimo absoluto $(y = 2)$

Las dimensiones deberán ser entonces, para que dicha área sea mínima, de 3 dm de largo, 1’5 dm de ancho y 2 dm de alto

**4.-** **De una función derivable *f(x)* se sabe que *f(0)=0* y que *f’(0)=1*.**

**Se define la función** $g(x) = [f(x)]^2 - e^{f(x)}$

**a) Calcular razonadamente la ecuación de la recta tangente a la función *g(x)* en el punto *x = 0***
**b) Calcular**
**c)**

*Solución:*

a) La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y - g(0) = g'(0)(x - 0)$

Calculo $g(0) = [f(0)]^2 - e^{f(0)} = -1$

Para calcular $g'(0)$ hacemos la derivada mediante la regla de la cadena:

$$g'(x)=2\left[f(x)\right]\cdot f'(x)-e^{f(x)}\cdot f'(x)$$

Por lo que $g'(0)=2\left[f(0)\right]\cdot f'(0)-e^{f(0)}\cdot f'(0)=-1$

Y la recta tangente pedida es: $y+1=-x \Rightarrow y=-x-1$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)+1}{2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=L'H=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)}{2}=\dfrac{g'(0)}{2}=-\dfrac{1}{2}$

**5.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$**

**Calcula razonadamente los valores de *a, b, c,* y *d* sabiendo que presenta un extremo relativo en el punto de abscisa *x = 0*, que *(1,0)* es un punto de inflexión de la gráfica de *f* y que en dicho punto la recta tangente tiene pendiente *- 3*.**

*Solución:*

Como tiene un extremo en $x = 0$, significa que $f'(0)=0$.

Como también tiene un punto de inflexión en el (1,0), significa que pasa por ese punto, es decir, $f(1)=0$, y que $f''(1)=0$.

Como además la recta tangente en ese punto tiene pendiente -3, significa que $f'(1)=-3$

Escribiendo las cuatro condiciones del ejercicio:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \;\Rightarrow\; f(1)=0 \;\Rightarrow\; a+b+c+d=0$$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \;\Rightarrow\; f'(1)=-3 \;\Rightarrow\; 3a+2b+c=-3$$

$$f'(0)=0 \;\Rightarrow\; c=0$$

$$f''(x)=6ax+2b \;\Rightarrow\; f''(1)=0 \;\Rightarrow\; 6a+2b=0$$

Resolviendo el sistema se obtiene $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$ y $d = 2$

**6.- Calcular los puntos de corte con los ejes, las asíntotas (y posición), la monotonía y los extremos de la función $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$ y representarla gráficamente con los datos anteriores**

*Solución:*

$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

Puntos de corte: Con OY , $(0,f(0))=(0,-1)$

Con OX no tiene pues $e^x\neq 0$

Asíntotas:

Asíntotas Verticales: $\lim\limits_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^{\pm}} \dfrac{e^x}{x-1} = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad A.V. \uparrow\downarrow \; x = 1$

Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x-1}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = L'H = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x-1} = 0 \;\to\; A.H.Izq \;\; y = 0$$

Vemos la posición con la asíntota horizontal izquierda:

$$f(x) - 0 = \frac{e^x}{x-1} \xrightarrow{x<<0} < 0 \Rightarrow Por\ Debajo$$

Además, no corta a su asíntota pues $e^x \neq 0$

Asíntota Oblícua:
Puede tener por la derecha:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2 - x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = L'H = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x-1}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = L'H = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty \;\Rightarrow\; No\,tiene$$

Calculo los puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-2)}{x^2} \;\Rightarrow\; e^x(x-2) = 0 \;\Rightarrow\; x = 2$$

Para la monotonía tenemos en cuenta el punto crítico y el dominio:

$(-\infty,1)$ $f'(0) < 0 \;\Rightarrow\; f\ decreciente$

$(1,2)$ $f'\left(\dfrac{3}{2}\right) < 0 \;\Rightarrow\; f\ decreciente$

$(2,+\infty)$ $f'(3) > 0 \;\Rightarrow\; f\ creciente$

Lo que además significa que tiene en $x = 2$ un mínimo relativo, que está en el punto $\left(2, e^2\right)$

Con todos estos datos, la representación de la función será: